

Title	Leray Schauder ノ不動点存在定理ノ一應用
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 159 p.207-p.218
Issue Date	1938-06-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74629
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

御 断 り

本紙出版ヲ内務省届出等ノ爲メ暫ク停滞
シテ井マシタ。今後ハ少シ方針ヲ変ヘテ
綜合報告ヤ論文紹介ノ様ナモノヲ多ク載
セタイト思ヒマス。附イテハ原稿ノ掲載
ニ制限ヲ加ヘルコトモアリマスカラ御諒
解下サイ。

703

673. *Leray Schauder* ノ不動点存在 定理ノ一應用

南 雲 道 夫 (阪大)

本紙 134 号デ “ $z = f(x, y, y')$ = 就テ” トシテ
書イタ境界値問題ノ存在定理 (與ヘラレタニ点ヲ通ル積分曲
線ノ存在 = ツイア) ハ “*Leray Schauder* ノ不動点ノ
存在定理カラ導カレルモノデアラ” トノ御注意ヲ福原氏カラ
受ケタノハ昨年ノ十一月デアッタ。之レハ福原氏ノ手紙ノ終
リ = 只一言ダケ述べラレタアッタノデ、ツヒ迂濶 = 不注意 =
打過シテシマツテ何トモ申譯ナイ次第デアレ。實ハ最近再ビ
氏ノ手紙ヲ見テ氣が付イタノデ之ヲ次ニ述べヨリ。

一 体 *Leray Schauder* ノ定理トハ何カ？

之レ = ツイテハ、スデ = 福原氏が本紙 142 号デ *Omotuita*
Mama 区 = 簡單 = 述べラレタアルガ、尚念ノタメ平易 = 説

明ヲ加ヘヨウ。先ヅ次 = 必要ナ概念ノ説明 (略述) カラ
始メヨウ。

§1. (B) 空間ト緊集合ノ説明

□ Banach 空間 ((B) ト略記スル) トハ線型 (一
次結合, 即チ實數 a_i デ $\sum_{i=1}^n a_i y_i$ が成立) 且ツ Norm
($\|y\|$ デ示ス。之レハ絶対値ノ性質ヲ有スル正又ハ零ノ實數)
ヲ有スル距離空間 ($\|y - z\|$ ヲ以テ y, z ノ間ノ距離トス
ル) デアツテ完全性 (Cauchyノ収斂條件成立) ヲ有スル
モノヲ云フ。

例ヘバ有限次元ノ Euklid 空間ハ (B) デアル。

又, 閉區間 $a \leq x \leq b$ = 於ケル連続函數 $f(x)$ ノ全体
ヲ (C) ト名付ケ (ソノ各要素 = 各函數ヲ点ト呼ビ, ソノ全
体ヲ空間ト稱スル)

$$\|f(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

= ヲツテ Norm $\|f\|$ ヲ定義スルトキ = ハ (C) ハ (B) ノ
一種トナル。

但シ (C) = 於ケル収斂ハ $f_n(x)$ ノ 一様収斂 ト一致ス
ル。

(C) ハ微分方程式論, 函數方程式論等ニ於テ重要ナ應用
ヲ有スル。

□ 緊集合 (kompakte Menge) 有限次元ノ
Euklid 空間デハ有限ナ点集合ハ必ズ集積点ヲ持ツ。

(Weierstrassノ定理). 然シ一般ノ(B) [特=(C)ノ場合] デハ之ハ成立シナイ。

“今 $M \subset (B)$ ニ於テ, \mathcal{U} ヲ M ノ任意ノ無限部分集合トスル時, 必ズ \mathcal{U} ノ集積点ハ M ニ存在スレバ, M ヲ緊集合トヨブ。”

尚 M ノ開被 (M ニソノ集積点ヲ加ヘテ開集合トセルモノ) \overline{M} ガ緊集合ナル時ニハ M ヲ緩イ緊集合トヨブ (實際ニハ只略シテ緊集合トヨブコトモアル). 之ハ Weierstrassノ定理 (ソノ結論)ガ成立スル集合デアル。

扱テ特=(C)ニ於ケル緊集合 (緩イカ)ノ条件ハ何デアルカ? ソレハ Ascoli-Arzelàノ定理ニヨツテ與ヘラレル。即チ

“ $M \subset (C)$ ガ (緩イ) 緊集合デアルトメノ必要且ツ充分ノ条件ハ

(1) M ノスベテノ函数ニツキ同一ノ M デ

$$|f(x)| \leq M \quad (M \text{ガ有界ノ事ト一致})$$

(2) 任意ノ正数 ε ニ對シ次ノ性質ヲ有スル正数 $\delta(\varepsilon)$ ガ存在スル: M ノスベテノ函数ニツキ同時ニ

$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \text{ナラバ必ズ } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

ガ成立スル (之レヲ M ガ同程度ニ連続デアルト呼ブ). ”

特ニ M ガ有界デ, 同一ノ Lipschitz 常数 L ヲ有スル函数ノ集合 ($|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ ガ成立)ナラバ M ハ (緩イ) 緊集合デアル。

[3] 尚微分方程式論ニ於テハ開區間 $a < x < b$ 又ハ半

閉区間 $a \leq x \leq b$ (或ハ $a < x < b$) 内デ連続ナ函数ノ集合 $\{f(x)\}$ ハ *Montel* ノ正規族 (之ノ任意ノ無限部分集合カラ緩ク一様収斂ヲスル函数列 $f_n(x)^*$ が取出セルモノ) ヲナス者が問題トナルコトが少クナイ。

此ノ場合ニ簡單ナ技巧ニヨツテ $\{f(x)\}$ ハ (B) 空間ノ緊集合 (緩イ) トスルコトが出来ル。

即チ $\{f(x)\}$ が正規族トナルコトカラ, $\{f(x)\}$ 全体ニ對シテ

$$|f(x)| \leq M(x)$$

ナル一定ノ連続函数ノ $M(x)$ ノ存在ガ解ル。ソコデ $N(x)$ ヲバ, $M(x) \leq N(x)$ 且ツ x が a 及ビ b ニ近ツキトキニ $M(x) = 0$ ($N(x)$) ナル様ナ連続函数トシ

$$\|f\| = \max \left| \frac{f(x)}{N(x)} \right|$$

ニヨリ $\|f\|$ ヲ定義スレバ $\{f(x)\}$ ハ (B) デ緊集合 (緩イ) トナル。(証明容易)

從ツテ此ノ場合ニ *Norm* ノナイ或ハ距離ノナイ空間ノドノ様ナ高度ノ抽象論ヲ用ヒナクトモ問題ニ合フノデアアル。

應用上ノ問題デハ $M(x)$ ナル函数ハイヤカジメ容易ニ得ラレル、又独立変數ノ領域ガ任意ノ次元デアツテモ同様デアアル。

* 問題ノ区間内ノ任意ノ閉区間デ $f_n(x)$ が一様ニ収斂スルコト。

又 $a = -\infty$, $b = +\infty$ デモ支障ナイ。

實際應用上ノ問題デハ只 (C) ノ代リニ適當ナ Norm
ヲ用フルコトハ有益ダト思フ。

§2 Leray Schauder ノ定理ノ説明

① 微分方程式ノ境界値問題ハ多ク (B) 空間ニ於ケル

$$(1) \quad y = \mathcal{F}(y)$$

ナル形式ノ函数方程式ヲ解リコトニ帰着サレル (次節参照)
但シ茲ニ $\mathcal{F}(y)$ ハ過連続 (Vollstetig) ナ運算ナル。

過連続ナ運算 $\mathcal{F}(y)$ トハ、 y ニ關シテ連続ナルノミナ
ラズ、 y ノ有界集合ヲ M トスル時、 $\mathcal{F}(y)$ ハ緊集合 (緩イ)
トナルモノヲ云フノデアル。例ヘバ (C) ニ於テ

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_a^x f(t) dt$$

トスレバ $\mathcal{F}(f)$ ハ過連続トナル。又

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

[$K(x, t)$ ハ $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ デ連続ナ一定ノ函数
ナル] モ (C) ニ於ケル過連続ナ運算ナル。

尚 (1) ナル式ハ \mathcal{F} ナル運算ニヨリ (B) ノ点ヲバ (B) 内
ニ寫像スル時ソノ前後ニ於テ一致スル点 y ノ存在スル事ヲ
示シテキル。カクノ如ク寫像ノ前後ニ於テ一致スル点ヲソノ
寫像ノ不動点 (Fix punkt) ト云フノデアル。

② 次ニ Leray Schauder ノ定理 (結果) ヲ述べ

ル。(先づ平易な爲メ=特別な場合ヲ述ベル)

此ノ定理ノ内容ハ連続性ノ原理トアモ名付ケタヲヨイカト思ハレル性質ノモノデアアル。即チ (I) ナル方程式=對シテ更ニばらめた λ ヲ含ンダ方程式 ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$$(II) \quad y = F(y; \lambda)$$

ヲ考フル。且シ $F(y; \lambda)$ ハ $\lambda = 0$ デ $F(y; 0) = 0$ トナリ, $\lambda = 1$ デ $F(y; 1) = F(y)$ トナル。

[例ヘバ $F(y; \lambda) = \lambda F(y)$]. $\lambda = 0$ ノ時解ノ存在($y=0$)ハ明ラカデアアルガ, 適當ナ條件ノ下ニ λ ガ 1 マデ連続的ニ変化スル時, 尚或ル範囲内ニ於ケルソノ解ノ存在ヲ示スノデアアル。即チ

“ 定理 ”

- (i) Ω ハ (E) 内ノ有界ナ開領域, ω ヲソノ境界トスル。
- (ii) $F(y; \lambda)$ ハ $y \in \overline{\Omega}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ デ λ ニツキ一様連続デアアル。 [$\overline{\Omega} = \Omega + \omega$]
- (iii) $F(y; \lambda)$ ハ $y \in \overline{\Omega}$ デ過連続デアアル。
- (iv) $0 \in \Omega$, $F(y; 0) = 0$, $F(y; 1) = F(y)$
- (v) $0 \leq \lambda < 1$ デ Ω ノ境界、 ω ハ $F(y; \lambda)$ ノ不動点 [(λ) ノ解] ヲ含マナイ。

以上ノ假定ガ成立スルトキハ, $F(y)$ ノ不動点 [(I) ノ解] ガ Ω ノ内ニ存在スル。”

(註) (ii), (iii), (iv) ハ $F(y; \lambda) = \lambda F(y)$ ナル場合ニ満サレナキレ。(v) ハ最モ意味ノ深い條件デアアル。 $0 \in \Omega$ 及ビ $F(y; 0) = 0$ ナル條件ハ, ヨリ一般的ナ條件, $\alpha \in \Omega$ 及ビ

$\mathcal{F}(\varphi; 0) = \alpha [\alpha \wedge (B)]$ / 定数] \neq 置キカヘテレル。

[3] 上述 / *Leray Schauder* / 定理ハ寫像 / 度数
(*degré topologique, Abbildungsgrad*) / 理
論 / 上 = 成立スルモノデアル。之レハ *Brouwer* が有限次
元 / 寫像論 = 於テ始メタ寫像度数 / 考ヘテバ, (B) 空間内デ
ノ寫像 $\varphi \xrightarrow{\pi} \varphi'$

$$\varphi' = \pi(\varphi) = \varphi - \mathcal{F}(\varphi)$$

[$\mathcal{F}(\varphi)$ ハ過連続] = マデ拡張シタモノデアル。即チ一定点
 α カ $\pi = 0$ リ Ω ノ像デ被ハレレ度数 (正負 / 符号ヲ有ス
ル整数) トモ言フベキモノヲ π, Ω, α = 對スル寫像度数
トヨビ, $d(\pi, \Omega, \alpha)$ デ之レヲ示ス。

$d(\pi, \Omega, \alpha)$ / 基本的ナ性質ハ

0° $d(\pi, \Omega, \alpha)$ ハ (正負又ハ零 /) 有理整数デアル。

但シ $\alpha \wedge \omega(\Omega \text{ ノ境界})$ / 像 $\pi(\omega) = 0$ ナモノ
ノトスル。

1° $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3, \quad \Omega_1 \cdot \Omega_2 = 0$ ナル時,

$$d(\pi, \Omega_3, \alpha) = d(\pi, \Omega_1, \alpha) + d(\pi, \Omega_2, \alpha).$$

2° $d(\pi, \Omega, \alpha) \neq 0$ ナラバ必ず $\alpha \in \Omega$.

3° π, Ω 及ビ α ガ連続的 (一樣連続的) = 変化する
時, 途中デ決シテ $\alpha \in \pi(\omega)$ トナラナケレバ,

$d(\pi, \Omega, \alpha)$ ハ不変デアル。

4° $\pi(\varphi) = \varphi$ [$\mathcal{F}(\varphi) = 0$ ト一致] 且ツ $\alpha \in \Omega$ ナル
時 = 1,

$$d(\pi, \Omega, \alpha) = 1.$$

以上ノ至(8)ノ基本性質ヲ用フレバ, 前述ノ定理ハ直チニ証明サレルヲケデアル。尚 (iv) = 於ケル條件 $0 \in \Omega$ 及ビ
 $\mathcal{F}(y, 0) = 0$ ノ代リ = ヨリ一般的ナ條件

$$(iv)' \quad d(\overline{\omega}, \Omega, \alpha) \neq 0 \quad [\overline{\omega}(y) = y - \mathcal{F}(y, 0)]$$

ガアレバ充分デアル。之レガ Leray Schauder ノ主定理デアル。(Annales de l'école normale supérieure 1934. 45頁—)

Leray Schauder ハ之ヲ同論文内ヲ楕圓型偏微分方程式ノ理論ニ應用シテキル。

§3 $y'' = f(x, y, y')$ ノ應用

□ 本紙 134 号ヲ得タ結果ヲ再ヒ述べレバ

“ \mathcal{L} ヲバ $\alpha \leq x \leq \beta$, $\underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x)$ ナル範囲トシ, $f(x, y, z)$ ハ $(x, y) \in \mathcal{L}$, $-\infty < z < +\infty$ デ連続且ツ

$$(1) \quad \begin{cases} |f(x, y, z)| \leq \varphi(|z|), & [\varphi(u) > 0], \\ \int_0^\infty \frac{u \, du}{\varphi(u)} = \infty. \end{cases}$$

次ニ $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ ハ二回微分可能デ

$$(2) \quad \begin{cases} \overline{\omega}'' < f(x, \overline{\omega}, \overline{\omega}'), \\ \underline{\omega}'' > f(x, \underline{\omega}, \underline{\omega}'). \end{cases}$$

然ラバ (α, A) , (β, B) ナル二点ヲ通ル

$$y'' = f(x, y, y')$$

ノ積分曲線ガ \mathcal{L} 内ニ存在スル。但シ $\underline{\omega}(\alpha) \leq A \leq \overline{\omega}(\alpha)$,

$$\underline{\omega}(\beta) \leq B \leq \overline{\omega}(\beta)''$$

134号がハ $f(x, y, z)$ ノミナラズ $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ノ連続性ヲモ假定シタ。Leray Schauder ノ定理ヲ應用スレバ、 f ノ連続性ガケガモ充合ナル。(前ノ方法ガモ $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ノ存在ノ假定ヲ除クコトが出来ルが一寸面倒=ナル)

[2] 簡單ノタメ $\underline{\omega}(a) < A < \overline{\omega}(a)$, $\underline{\omega}(b) < B < \overline{\omega}(b)$ ナル場合ノ証明ヲ述ベヨウ。

先ヅ $y = \alpha(x)\eta + \beta(x)$ [$\alpha(x), \beta(x)$ ハ $a \leq x \leq b$ デ二回微分可能、且 $\alpha(x) > 0$] ナル変換=ヨリ方程式ガ

$$\eta'' = \phi(x, \eta, \eta')$$

=移ツタ時=モ、上述ノ條件 ($\underline{\omega}, \overline{\omega}$ モ上ノ変換=ヨリ変換ナレル。又 $|f(\cdot)| \leq \varphi(x)$ ハ φ ト同性質ノ他ノ函数 $\psi(\eta') = \text{ヨリ}$, $|\phi(\cdot)| \leq \psi(\eta')$ デオキカヘラレル) ハスベテ成立スル。

$$\text{故ニ我々ハ} \quad A = B = 0$$

$$\overline{\omega}''(x) < 0, \quad \underline{\omega}''(x) > 0, \quad [\underline{\omega}(x) < 0, \quad \overline{\omega}(x) > 0 \text{ トナル}]$$

ト假定シテモ支障ナイ。

$$\text{今 (3) } y'' = \lambda f(x, y, y')$$

ナル微分方程式=ツキ $y(a) = y(b) = 0$ ナル積分ハ

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

$$z(x) = \lambda \int_a^b G_x(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

ナル方程式ノ解ト一致スル。即シ $z(t) = y'(t)$,

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-x)}{b-a} & (a \leq t \leq x \leq b) \\ -\frac{(b-t)(x-a)}{b-a} & (a \leq x \leq t \leq b) \end{cases}$$

ソコデ

$$y^*(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

$$z^*(x) = \lambda \int_a^b G_z(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

トシテ, $(y(x), z(x)) \rightarrow (y^*(x), z^*(x)) =$ 移入運算 (寫像) \mathcal{F}_λ トシ, Norm \rightarrow $\text{Max}(|y(x)|, |z(x)|)$ ニヨツテ定義スレバ \mathcal{F}_λ ハ連続統 (vollstetig) トナル。

從ツテ問題ハ $(y, z) = \mathcal{F}_\lambda(y, z)$ ナル不動点ノ存在ニアル。

[3] 條件 (1) ニヨリ, 方程式 (3) ノ解ヲ $(0 \leq \lambda \leq 1$ トス) $y(a) = y(b) = 0$, $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$ ナル $\epsilon /$ ニツイテハ必ズ

$$|y'(x)| < M$$

ナルヤウナ M ノ存在ガ証明出來ル。

ソコデ $y(x), z(x)$ ヲバ $a \leq x \leq b$ ニ於テ夫々 $\underline{\omega}(x) < y(x) < \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| < M$ ナル様ニ任意ノ連続函数トシ, カルル函数ノ組 (y, z) ノ全体ヲ \mathcal{B} トスル。シカラバ前述ノ Norm ノ意味テ \mathcal{B} ハ有界ノ閉集合トナル。

又 Ω の開被 $\bar{\Omega}$ は $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| \leq M$ となる y, z の組 (y, z) の全体ト一致スル。

従って Ω の境界 $\omega =$ 属スル (y, z) トハ,
 $a \leq x \leq b$ 於て, $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| \leq M$ であり,
 且つ上ノ内イザレカーツノ等号が成立スル様ナ x ノ値ガ
 $a \leq x \leq b$ 存在スルモノデアル。

取テ \mathcal{F}_λ ハ $\bar{\Omega}$ デ連続テ, $\lambda =$ ツキ $\bar{\Omega}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ デ一様連続デアル。又 $(0, 0) \in \bar{\Omega}$, $\mathcal{F}_0(y, z) = (0, 0)$ デアルカラ, 定理ノ条件 (i), (ii), (iii), (iv) ハスベテ成立シテキル。故ニアトハ (v) 即チ $\bar{\Omega}$ ノ境界 ω ガ \mathcal{F}_λ ノ不動点ヲ含マヌトヲ示セバヨイ, ($0 \leq \lambda \leq 1$ ノ時)

所ガ \mathcal{F}_λ ノ不動点 (y, z) トハ, $y(a) = y(b) = 0$ ナル様ナ

$$y'' = \lambda f(x, y, y')$$

$$z = y'$$

ノ解デアル。 $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$ ナル解ニツイテハ
 $\bar{\omega} = |z(x)| < M$ デアルカラ, $(y, z) \in \omega$ トナルノハ

$$\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$$

ニ於テドレカーツ等号が成立スル x ノ値 $x = \xi$ ガ存在スル場合デアル。 $\underline{\omega}(a) < y(a) < \bar{\omega}(a)$, $\underline{\omega}(b) < y(b) < \bar{\omega}(b)$ ニヨリ, $a < \xi < b$ デナケレバナラヌ。

$\underline{\omega}(\xi) = y(\xi)$ ナルトキニハ, $y'(\xi) = \underline{\omega}'(\xi)$, $y''(\xi) \geq \underline{\omega}''(\xi)$ トナル。又 $\bar{\omega}(\xi) = y(\xi)$ ナルトキニハ, $y'(\xi) = \bar{\omega}'(\xi)$,

$y''(\xi) \leq \bar{\omega}''(\xi)$ トナル、之レハ $\underline{\omega}''(x) > 0$, $\bar{\omega}''(x) < 0$
 ナルコト ([2] ノ交換ニヨル) 及ビ (2) カラ 生ズル不等式

$$\bar{\omega}'' < \lambda f(x, \bar{\omega}, \bar{\omega}') \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\underline{\omega}'' > \lambda f(x, \underline{\omega}, \underline{\omega}')$$

ト矛盾スル。故ニ (V) ナル條件が証明サレタ。

[4] 大体上ノ様ナ考ヘ方デヤレバ (I) ナル條件ハモット
 一般的ナヒノデ置キ換ヘラレルコトモ証明出来ルガ、ソレハ
 又、機会ニ譲レコトニシヨウ。又 (2) ノ條件ニ於テ等号ハア
 ツテモ支障ナイコトモ容易ニ解ル。